SZÁVAI GERGELY

TANULSÁGOS FELADATOK MATEMATIKÁBÓL

Több mint 9 feladat!

Műszaki Könyvkiadó

DR. Szávai Gergely

Tanulságos Feladatok MATEMATIKÁBÓL

Hetedik kiadás

Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1993

Lektorálta

Reiman István

Felelős szerkesztő

Gimes György

ISBN 963 18 4348 3

Tartalom

Előszó

A kötet, amit az olvasó a kezében tart azoknak íródott, akik egyetemi felvételire készülnek, vagy érettségire, vagy egyeltalán: kedvet éreznek ahhoz, hogy érdekes feladatokból csemegézzenek. /Vagy egyeltalán nem éreznek semmit/

Igyekeztem minél kedvesebb feladatokat válogatni. A legtöbb feladatnak csak egy megoldása szerepel helyszűke miatt /*/.

A feladatok -többnyire- igen nehezek, így nem is a feladatmegoldást kell élvezni, hanem a fantasztikus megoldásomat.

A kötet könnyebb feladatai: 5; 6; 1

Ezeket meg lehet próbálni megoldani! Jó szórakozást!

* Vagy mert örül a szerző, ha egyeltalán megtudja oldani a feladatot (Másodjára esetleg más jönne ki)

/Lektori megjegyzés/

Feladatok

1

$$\left.\begin{aligned} &(1)\ x(x+y+z)=20 \\ &(2)\ y(x+y+z)=30 \\ &(3)\ z(x+y+z)=50 \end{aligned}\right\}\quad x;y;z\in\mathbb{R}$$

Oldjuk meg az egyenletrendszert!

Megoldás:

Adjuk össze a 3 egyenletet:

$$x(x+y+z)+y(x+y+z)+z(x+y+z)=20+30+50$$

Emeljük ki $(x+y+z)$-t:

$$(x+y+z)(x+y+z)=100 \quad /\text{Gyökvonással}$$

$$|x+y+z|=10$$

a) Két eset van: $x+y+z=10$ vagy

$$x+y+z=-10$$

Vizsgáljuk meg az első esetet:

Az első egyenletből következik:

$$x\cdot 10=20$$

$$x=2$$

A másodikból:

$y \cdot 10 = 30$

$y = 3$

A harmadikból:

$z \cdot 10 = 50$

$z = 5$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ez a megoldás jó.
Hasonlóan az $x+y+z=-10$ esetet megvizsgálva az $x=-2; y=-3; z=-5$ eredményhez jutunk.

Tehát a megoldás:

$M=\{(2;3;5);(-2;-3;-5)\}$

(2) $x \longmapsto px+p$

Határozzuk meg az adott függvény p-paraméterét, ha tudjuk, hogy a függvény az $[1;3]$ intervallumban $/1 \leq x \leq 3/$ minimuma 3.

<u>Megoldás:</u>

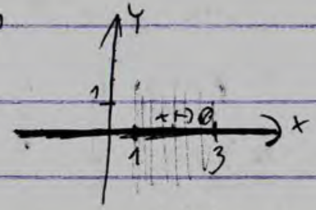
$p \in \mathbb{R}$

3 eset lehetséges:
- $p=0$
- $p>0$
- $p<0$

1) Az első esetben a függvény: $x \mapsto 0 \cdot x + 0$

$x \mapsto 0$

Képe:



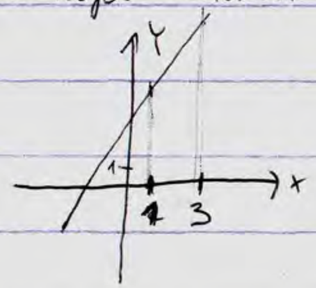
A képe maga az x tengely.

Látható, hogy minden x értékre $y=0$, így az $[1;3]$ intervallumban is, tehát ez nem megoldás

b) A második esetet vizsgálva: $p>0$

Mivel $p>0$, ezért a függvény emelkedni fog, s ezt még feltoljuk p-vel $/x \mapsto px+p/$

Ezért a képe valami ilyesmi lesz:

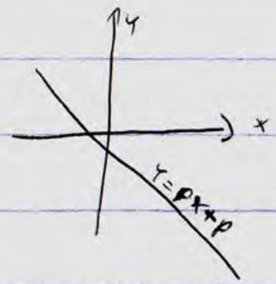


Mivel a függvény ~~-szigorúan-~~ növekvő, ezért a minimumát /az $[1;3]$ intervallumban/ 1-nél veszi fel. Tehát $x=1$-nél van a minimum: 3

$$\left.\begin{array}{l} y=px+p \\ y=3;\ x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 3=p\cdot 1+p \\ 3=2p \\ \frac{3}{2}=p \end{array}$$

c) A harmadik esetben nincs megoldás, mivel a függvény az $[1;3]$ intervallumban mindenhol negatív értéket vesz fel.

$p<0$



Tehát az egyetlen megoldás: $p=\frac{3}{2}$

Így a függvény:

$x \mapsto \frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$

/Megjegyzés: ez már csemege/

③ Hol veszi fel a

$$\sqrt{x^2+25}+\sqrt{(x-10)^2+25}$$

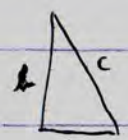
kifejezés a legkisebb értéket?

Megoldás:

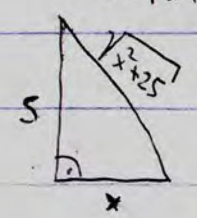
A koordináta rendszert hívjuk segítségül:

Felhasználva, hogy: Egy derékszögű háromszögben az átfogó: $c^2=a^2+b^2$

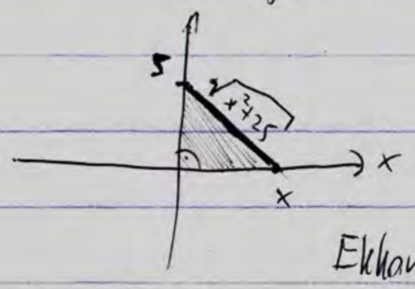
$c=\sqrt{a^2+b^2}$



Így

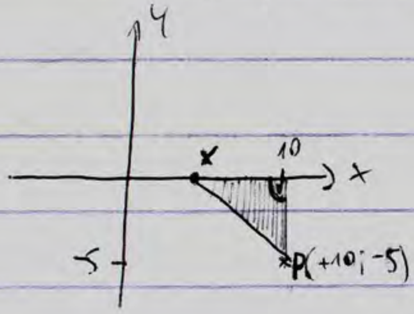


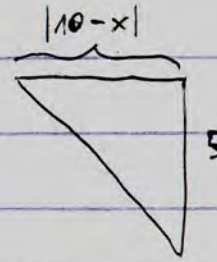
Tehát x mozogjon az x tengelyen:



Ekkor a $\sqrt{x^2+25}$ = a vastag szakasszal.

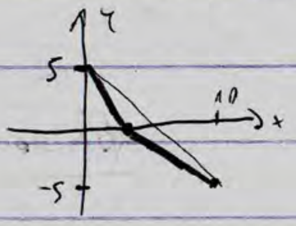
Hasonlóan: Ha a koordináta rendszerben felvesszük a (10;-5) koordinátájú pontot:





$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(10-x)^2+5^2}$

Felvehettük volna a (10;5) pontot is, de most jön a trükk: Ott a legkisebb a kifejezés értéke, ahol a 2 szakasz összege a legkisebb:



Ez akkor teljesül, ha "egy egyenes lesz a 2 szakasz". Ez x=5-nél teljesül (Majd tanuljátok) -

Lásd: 6-os feladat

(4) Ha már tanultátok a másodfokú egyenlet megoldó képletét:

Adjuk meg azokat a pozitív egészekből álló $(x;y)$ számpárokat, amelyek megoldásai a következő egyenletnek:

$$x^2-4xy+5y^2=25.$$

Megoldás:

Az egyenlet x-re másodfokú, alkalmazható a másodfokú egyenlet megoldóképletét:

$$x_{1;2}=\frac{4y\pm\sqrt{(4y)^2-4(5y^2-25)}}{2}=\cancel{\frac{4y\pm\sqrt{4}[y^2}{2}}$$

$$=\frac{4y\pm\sqrt{16y^2-20y^2+100}}{2}=2y\pm\frac{\sqrt{-4y^2+100}}{2}=$$

$$=2y\pm\frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{-y^2+25}}{2}=2y\pm\sqrt{-y^2+25}$$

Ez csak akkor lesz pozitív egész szám (a feltétel kikötése), ha $2y\pm\sqrt{-y^2+25}>0$ és $\sqrt{-y^2+25}$ egész: $\sqrt{25-y^2}$, ami csak akkor van értelmezve, ha $25-y^2\geq 0$ ez csak 6 esetben lehetséges: $y=0$, $y=1$, $y=2$, $y=3$, $y=4$, $y=5$

Ezekközül $25-y^2$ négyzetszám, ha $y=0$, vagy $y=3$, vagy $y=5$

Vissza helyettesítve: a) $x_{1;2}=2\cdot 0\pm\sqrt{25}=\pm 5 \Rightarrow x=5$, ha $y=0$ /mivel $-5<0$/

b) $x_{1;2}=2\cdot 3\pm\sqrt{25-9}=6\pm 4 \Rightarrow x_1=10$ ha $y=3$; $x_2=2$ ha $y=3$

c) $x_{1;2}=5\cdot 2\pm\sqrt{25-25}=10 \Rightarrow x=10$, ha $y=5$

Tehát (ellenőrizve):

$$M=\{(5;0);(10;3);(\cancel{10}2;3);(10;5)\}$$

(5) Bizonyítsd be, hogy N egy természetes szám négyzete, ha:

$$N = 1986 + 2\cdot(1+2+3+\ldots+1983+1984+1985)$$

Megoldás:

$$2\cdot(1+2+\ldots+1984+1985) = (1+1985)+(2+1984)+\ldots+(1984+2)+$$
$$+(1985+1) = \underbrace{1986+1986+\ldots+1986+1986}_{1985\text{ db}} = 1985\cdot 1986.$$

Tehát: $N = 1986 + 2(1+2+\ldots+1984+1985) = 1986 + 1985\cdot 1986 =$
$= 1986(1+1985) = 1986^2$.

Tehát az állítás igaz.

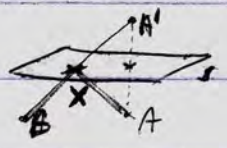
(16) Adott a térben egy S sík és a rá nem illeszthető A és B pontok. Melyik a legrövidebb A-t B-vel összekötő útvonal, amely az S síknak legalább egy pontját is tartalmazza?

Megoldás:

Két eset lehetséges:

a) Az **A** és **B** pontokat elválasztja egymástól az **S** sík: ekkor a legrövidebb út az egyenes: Maga az $\overline{AB}$ a keresett útvonal

b) Ha az AB szakasz nem metszi az **S** síkot, akkor tükrözzük az A pontot az **S**-re: ekkor (Ha az S síknak az a bizonyos pontja **X**) $\overline{AX} = \overline{A'X}$, Tehát $\overline{AX} + \overline{XB} = \overline{A'X} + \overline{XB}$, így a feladatot vissza vezettük az a) esetre!



Bizonyítsd be, hogy ha

(1.) $x^2-3xy+2y^2+x-y=0$ és

(2.) $x^2-2xy+y^2-5x+7y=0$

akkor $xy-12x+15y=0$

Megoldás: - Az egyenletrendszer minden x-re és y-ra értelmezhető /feltétel/

Az első egyenletből:

$(x^2-xy)+(2y^2-2xy)+(x-y)=0$

$x(x-y)+2y(y-x)+(x-y)=0$

$(x-y)(x-2y+1)=0$

Két eset lehetséges: a) $x=y$, ezt behelyettesítve a második egyenletbe: $y^2-2y^2+y^2-5y+7y=0$

$2y=0$

$y=0$

Ekkor $xy-12x+15y$ valóban nulla, mivel $x=y=0$

b) $x-2y+1=0 \Rightarrow x=2y-1$, ezt behelyettesítve az második egyenletbe:

$x^2-2xy+y^2-5x+7y=0$

$(2y-1)^2-2y(2y-1)+y^2-5(2y-1)+7y=0$

$4y^2-4y+1-4y^2+2y+y^2-10y+5+7y=0$

$y^2-5y+6=0$

Ugyanezt kapjuk, ha a bizonyítandó $xy-12x+15y=0$ összefüggésbe x helyére $2y-1$-et írunk;

$(2y-1)y-12(2y-1)+15y=0$

$2y^2-y-24y+12+15y=0$

$2y^2-10y+12=0$

$y^2-5y+6=0$

Tehát az állítás igaz.

8 Bejárható-e egy 5×5-ös sakktábla egy csikóval úgy, hogy minden mezőre csak egyszer lépünk és ugyanoda jussunk vissza, ahol ~~befejez~~ elkezd-tük?

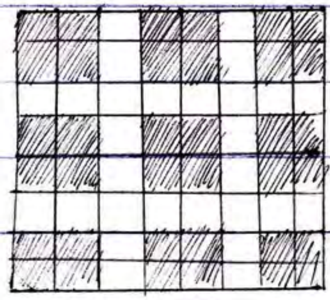
Megoldás:

A csikó lépéséből következik, hogy ha fehér mezőről lépünk el, feketére jutunk; és fordítva. Tegyük fel hogy fekete mezőről indulunk. Mivel minden mezőre pontosan egyszer lépünk, ezért 25 lépés lesz. Ha tehát feketéről indulunk, akkor az első lépésben fehérre lépünk. A másodikban feketére, a harmadikban megint fehérre... Tehát minden páratlan lépésben fehérre lépünk, így a 25-ik lépésben is. Azonban fekete mezőről indultunk; ellentmondásra jutottunk, Tehát nem lehető meg.

9 A 8×8-as sakktáblára 2×2-es lapocskákat helyezünk átfedés nélkül úgy, hogy minden lapocska pontosan négy mezőt takar le. Nyolc lapot már elhelyeztünk. Bizonyítsuk be, hogy elfér még a kilencedik is!

Megoldás:

Tekintsük a sakktáblát:



A bevonalkázott 2×2-es területeket nevezzük el celláknak. Csak akkor nem tudnánk lerakni a 9-ik lapocskát, ha egy üres cella sem lenne, azaz mindegyikben legalább egy mező foglalt lenne. Azonban egy lapocska csak egy cellába "lóghat bele" a cellák közötti terület miatt. Így nyolc lapocska maximum 8 cellát foglalhat le, tehát mindig lesz egy szabad cella, ahová letehetjük a kilencedik lapocskát.

Ezzel bizonyítottuk a feladatot.

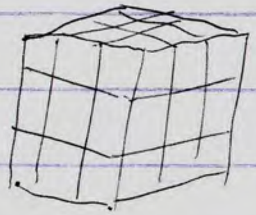
(10) Lehetséges-e olyan testet összeragasztani mokka cukrokból, amelynek minden oldallapja négyzet, és a test nem kocka?

Megoldás:

LADOZZ!

Pl:

⟨Belül üres is lehet⟩



⟨Belül üres⟩

Jegyzetek